– المصفوفات والمحددات «MATRICES AND DETERMINENTS»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

$$Ax = b \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = b \cdot A^{-1}$$

Scanned by CamScanner

* المصفوفة "MATRIC"

هي بالتعريف جدول مكون من m سطر و n عمود (m x n) من النمط ويرمز لها :

$A(a_{ij})$ ، حيث $i = 1, 2, ..., m$ و $j = 1, 2, ..., n$

حيث الدليل (i) يشير الى عدد الأسطر ويسمى الدليل السطري .

والدليل (j) يشير الى عدد الأعمدة ويسمى الدليل العمودي .

* مقلوب مصفوفة: "Matric Transport"

هو مصفوفة ناتجة عن A بجعل أسطرها أعمدة أو الأعمدة أسطر ، وغالباً ما نرمز لها A^{-1} .

← المصفوفة تبقى رمزاً رياضياً ليس له قيمة عددية كما هو في المحددات ، واذا كانت تتألف من أعداد حقيقية نقول عنها أنها مصفوفة (حقيقية) (Real Matric).

← اذا كانت A مصفوفة من المرتبة n فاننا نرمز بـ det(A) لمحدد المصفوفة A ، أي أن $det(A) = |A|$.

← نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة نظامية (Regular) اذا كانت قيمة محددها مغايرة للصفر والا فإن المصفوفة A هي "مصفوفة شاذة" (Singular)

← جداء المصفوفة $\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- جداء المصفوفات عموماً عملية غير تبديلية $(A \cdot B \neq B \cdot A)$

في بعض الحالات الخاصة تبقى الخاصة التبديلية محققة :

$* \; A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$ $\quad * \; A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Scanned by CamScanner

تذكرة: المصفوفة الواحدية: هي مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد.

المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار.

← اذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة واحدة وكان لهما المعكوسان على الترتيب A^{-1} و B^{-1} فإن: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

← اذا كانت المصفوفة A من النمط $m \times n$ حيث $(\det A \neq 0)$ فإننا نسمي A^{-1} مقلوب المصفوفة أو معكوس المصفوفة A وذلك اذا تحقق

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$A \text{ is Invertable} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

* آلية ايجاد مقلوب مصفوفة:

1- نجد $\det(A)$ فإذا كان مساوي للصفر تكون المصفوفة شاذة، ولا يوجد لها مقلوب، أما اذا كان $\det A \neq 0$، فإننا نجري الخطوات التالية:

2- نجد المصفوفة المساعدة (A^*) (Adjaint Matric)، والتي تتشكل على النحو التالي:

أ- نبدل عناصر المصفوفة A بالمحددات الصغرى الموافقة لهذه العناصر، ثم نجعل الأسطر أعمدة، وينتج عن ذلك:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

3- نقسم جميع عناصر المصفوفة المساعدة على $\det(A)$ ينتج المطلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Scanned by CamScanner

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

أوجد $(2A-3B)$ و $(A+B)$:

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix},\quad 2A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix}3 & 15\\ -6 & 9\\ -3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow 2A-3B=\begin{pmatrix}1 & -21\\ 6 & -7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

مثال:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$ أوجد $A\cdot B$

الحل: قبل إجراء عملية الضرب، يجب أن نتأكد أن عدد أسطر المصفوفة B يساوي عدد أعمدة المصفوفة A،

- نضرب السطر الأول من المصفوفة A بالعمود الأول من المصفوفة B، حيث يضرب كل عنصر من السطر مع العنصر المقابل له من العمود في المصفوفة B،

- ثم نضرب السطر الأول بالعمود الثاني للمصفوفة B فينتج العنصر الثاني من السطر الأول للمصفوفة الناتجة C.

- ثم نضرب السطر الأول من المصفوفة A مرة أخرى بالعمود الثالث للمصفوفة B فينتج العنصر الثالث من السطر الأول لـ C.

- ثم ننتقل الى السطر الثاني من المصفوفة A لنضربه بكل عمود من المصفوفة B (مع جمع نتائج الضرب).

وهكذا، ويتم توضيح ذلك في المصفوفة التالية:

Scanned by CamScanner

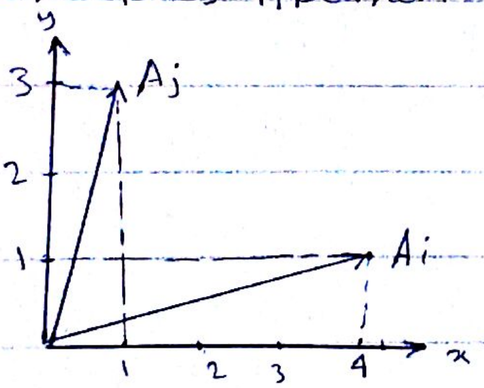
$$A.B = \begin{pmatrix} 2(1)+0(0)+1(-1) & 2(0)+0(2)+1(0) & 2(-1)+0(1)+1(2) \\ 1(1)+(-1)(0)+(-2)(-1) & 1(0)+(-1)(2)+(-2)(0) & 1(-1)+(-1)(1)+(-2)(2) \\ 1(1)+1(0)+1(-1) & 1(0)+1(2)+1(0) & 1(-1)+1(1)+1(2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ في هذا المثال أنه لا يمكن حساب الجداء $B.A$ ، لعدم تحقق شرط الجداء.

مثال: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3

أوجد Aj ، Ai ، Describethem Geomtirically (وصفهما هندسيا)



الحل: $Ai = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Aj = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

find the inverte:

$A_{11} = 1$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 1$

$A_{31} = 1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , A^{-1} = \frac{1}{2} . A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- انتهت المحاضرة : ١٨ -

Scanned by CamScanner